Problème N°4

La partie 1 comporte quatre questions indépendantes, dont les résultats sont utilisés dans certaines questions des parties 2, 3 et 4 .

Les candidats n'ayant pas réussi à traiter l'une ou l'autre des questions de la partie 1 pourront néanmoins faire appel aux résultats qui y sont clairement énoncés.

PARTIE 1

1.1. Soit n un entier naturel et x et t deux réels. On définit :

$$\Phi = \frac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t)$$

Montrer que :

$$\Phi = \frac{\sin\left[(2n+1).\left(\frac{x-t}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{x-t}{2}} \qquad \text{si : } x-t \neq 0\ [2\pi]$$

$$\Phi = n + \frac{1}{2} \qquad \text{si : } x - t = 0\,[2\pi].$$

1.2. a et b sont deux réels tels que $a < b$; soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

Pour tout λ réel, on note $I_\lambda = \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt$ et $J_\lambda = \int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt$.

En effectuant une intégration par parties, prouver que I_λ et J_λ ont pour limite 0 quand λ tend vers $+\infty$.

1.3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et 2π-périodique.

Soit x un réel donné; on note par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\,(t \neq x\ [2\pi]) : \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad h(x + 2k\pi) = (-1)^k f'(x).$$

Démontrer que h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.4. a et b étant deux réels $(a < b)$, on note $I = [a, b]$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur I et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ soit convergente et que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n(x)| \leq \alpha_n.$$

a. Montrer que la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ est une fonction continue sur I.

b. Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) dx - \sum_{p=0}^{n} \int_a^b v_p(x)\, dx \right| \leqslant (b-a) \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p .$$

c. En déduire que :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b v_n(x)\, dx.$$

PARTIE 2

2.1. Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin^3 x| .$$

Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

Démontrer que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^3.

2.2. Démontrer qu'il existe un couple de réels (A, B) tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3 x = A.\sin x + B.\sin 3x .$$

2.3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t| \,.\, \cos(nt)\, dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t| \,.\, \sin(nt)\, dt.$$

a. Calculer b_n.

b. Calculer a_{2n+1}.

c. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

PARTIE 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, 2π-périodique et de classe C^2.

On note :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos(nt)\, dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin(nt)\, dt$$

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2}$$

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\, (\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n(x) = a_n(f).\cos(nx) + b_n(f).\sin(nx)$$

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\, (\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x).$$

3.1. En utilisant le résultat de la question (1.1), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt.$$

3.2. x étant un réel donné et n un entier naturel, quelle est la valeur de :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt\ ?$$

3.3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \,.\, \sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] dt$$

h étant la fonction définie dans la question (1.3) .

En utilisant le résultat de la question (1.2), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x).$$

PARTIE 4

On suppose toujours que f est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et 2π-périodique.

4.1. *a.* En effectuant des intégrations par parties, calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b. En déduire qu'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |a_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2} \quad \text{et} \quad |b_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2}.$$

c. Soit g une fonction définie et continue sur $[-\pi, \pi]$. En utilisant le résultat de la question (3.3), démontrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) . g(x)\, dx.$$

4.2. Démontrer, en utilisant le résultat de la question (4.1.c), que si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et 2π-périodiques :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{a_0(f)\, a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\,.\,a_n(g) + b_n(f)\,.\,b_n(g)\Big).$$

4.3. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) = |\sin^3 x|$.

a. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x\, dx$.

b. En déduire que :

$$\pi^2 = \frac{8}{5}\left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{576}{[(4n^2-9)(4n^2-1)]^2}\right].$$

Démonstration du Th. de Dirichlet pour une fct de classe C^2. Application : approximation de π^2 par une série.

1.1

Posons $x - t = u$. $\begin{cases} \Phi = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu \\ \Psi = \sin u + \sin 2u + \dots + \sin nu \end{cases}$

* Si $u \neq 0\ [2\pi]$, $\Phi + i\Psi = \frac{1}{2} + e^{iu} + e^{i2u} + \dots + e^{inu} = \frac{1}{2} + e^{iu}\frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}}$

$$= \frac{1}{2} + e^{iu}\frac{e^{\frac{inu}{2}}\left(e^{-\frac{inu}{2}} - e^{\frac{inu}{2}}\right)}{e^{i\frac{u}{2}}\left(e^{-i\frac{u}{2}} - e^{i\frac{u}{2}}\right)} = \frac{1}{2} + e^{i\frac{u(n+1)}{2}}\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

D'où $\Phi = \frac{1}{2} + \dfrac{\sin\frac{nu}{2} \cdot \cos\frac{(n+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$ $(*)$

Comme $\sin\frac{nu}{2} \cdot \cos\frac{(n+1)u}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{nu}{2} + \frac{(n+1)u}{2}\right) + \sin\left(-\frac{u}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)u}{2}\ \frac{1}{2}\sin$

on obtient en remplaçant dans $(*)$:

$$\boxed{\Phi = \frac{\sin\frac{(2n+1)u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}}$$ comme prévu.

* Si $u = 0\ [2\pi]$, $\boxed{\Phi = n + \frac{1}{2}}$.

1.2 $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = \left[f(t)\frac{-\cos\lambda t}{\lambda}\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\,dt$

$$= \frac{f(a)\cos\lambda a - f(b)\cos\lambda b}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos\lambda t\,dt$$

Si $M = \sup\limits_{[a,b]} |f'(t)|$ (qui existe puisque f' est continue sur $[a,b]$) :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}M(b-a)$$

montre bien que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = 0$. De m̂ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} J_\lambda = 0$

1.3

h est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus (x + 2\pi\mathbb{Z})$ comme quotient de fcts C^∞, le dénominateur ne s'annulant pas.

* Continuité en $x + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Posons $u = t - (x + k2\pi)$.

$$\lim_{t \to x+k2\pi} h(t) = \lim_{u \to 0} h(u + x + k2\pi) = \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x+k2\pi) - f(x)}{2 \sin \frac{u+k2\pi}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x)-f(x)}{2\sin\left(\frac{u}{2}+k\pi\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{f(u+x)-f(x)}{2(-1)^k \sin\frac{u}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x)-f(x)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \cdot (-1)^k$$

$$= (-1)^k f'(x) \doteq h(x + k2\pi)$$

Donc h sera continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

* h est continuement dérivable sur $\mathbb{R} \setminus (x + 2\pi\mathbb{Z})$, et continue sur tout $\mathbb{R}$. Elle sera continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ si l'on montre que $h'(t)$ tend vers une limite finie ℓ_k quand t tend vers $x + k2\pi$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas, on aura : $h'(x+k2\pi) = \ell_k$. On a :

$$h'(t) = \frac{f'(t) \cdot 2\sin\frac{t-x}{2} - (f(t)-f(x))\, 2\cos\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{4 \sin^2 \frac{t-x}{2}}$$

Ici $t \to x + k2\pi$. Posons $u = t - (x + k2\pi)$.

$$h'(t) = \frac{2f'(u+x)\sin\left(\frac{u}{2}+k\pi\right) - (f(u+x)-f(x))\cos\left(\frac{u}{2}+k\pi\right)}{4\sin^2\left(\frac{u}{2}+k\pi\right)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} \; \frac{2f'(u+x)\sin\frac{u}{2} - (f(u+x)-f(x))\cos\frac{u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

La formule de Taylor-Young appliquée à f, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donne :

$$\begin{cases} f(u+x) - f(x) = f'(x)u + \dfrac{f''(x)}{2}u^2 + o(u^2) \\ f'(u+x) = f'(x) + f''(x)u + o(u) \end{cases}$$

et en remplaçant :

$$h'(t) = \frac{(-1)^k}{4} \frac{\left(2f'(x) + 2f''(x)u + o(u)\right)\left(\frac{u}{2} + o(u^2)\right) - \left(f'(x)u + \frac{f''(x)}{2}u^2 + o(u^2)\right)\left(1 - \frac{u^2}{8} \ldots o(u^2\right.}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} \cdot \frac{f'(x)u + f''(x)u^2 + \frac{u}{2}o(u) + o(u^2) - \left[f'(x)u + \frac{f''(x)}{2}u^2 + o(u^2)\right]}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} \frac{\frac{f''(x)}{2}u^2 + o(u^2)}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

Comme $\sin^2 \frac{u}{2} \sim \frac{u^2}{4}$, $\lim\limits_{u \to 0} h'(t) = (-1)^k \frac{f''(x)}{2}$

Ccl : h est de classe C^1 et $\boxed{h'(x + k2\pi) = (-1)^k \frac{f''(x)}{2}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

1.4.a La condition :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{x \in I} |v_n(x)| \doteq \|v_n\|_\infty \leq \alpha_n$$

alliée à la convergence de $\sum \alpha_n$, montre que la série de fonctions $\sum v_n(x)$ converge uniformément vers $S(x)$.

La limite uniforme d'une suite de fcts continues est continue, donc $S(x)$ sera continue sur tout I.

1.4.b Evident. Le premier membre de l'inégalité proposée est majoré par :

$$\left|\sum_{p=n+1}^{\infty} \int_a^b |v_p(x)|\,dx\right| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \int_a^b |v_p(x)|\,dx \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} (b-a)\,\alpha_p$$

1.4.c Si $n \to +\infty$, $\sum_{p \geq n+1} \alpha_p$ rend vers 0 donc le 1er membre de l'inégalité du 1.4.b tend vers 0. On obtient l'égalité du 1.4.c.

NB : On utilise ici la convergence normale de la suite de fcts $\sum v_n(x)$. En fait, un Th. classique stipule que si $\sum v_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ et si chaque $v_n(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, alors on peut permuter $\int$ et $\sum$ (et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ est intégrable sur $[a,b]$), ie :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b v_n(x)$$

2.1 f est paire et périodique de période 2π. Elle est continue et C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus k\pi$. Notons Γ sa courbe représentative. $f(\pi - x) = f(\pi + x)$ montre que $x = \pi$ est axe de symétrie de Γ.

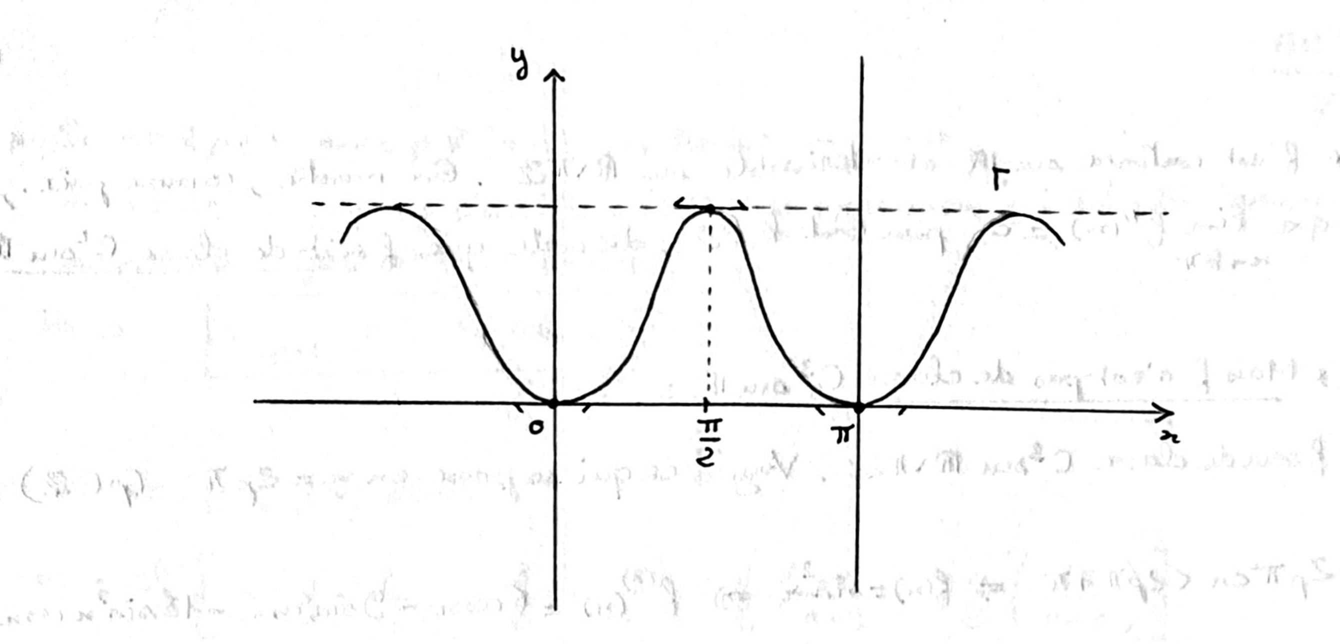
On étudiera donc f sur $[0,\pi]$, puis on complètera par symétrie /à la droite d'équation $x = \pi$, puis par symétrie /à Oy.

$f(x) = \sin^3 x$ sur $[0,\pi]$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

$f'(x)$ s'annule ssi $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, d'où les variation de f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	0	+	0	−	0
f	0	↗	1	↘	0

(NB : on peut aussi déduire les variations de f de celles de $\sin x$ sur $[0,\pi]$!)



Pb d'inflexion : $f''(x) = 3\sin x(2-3\sin^2 x)$ s'annule en changeant de signe sur $]0,\pi[$ ssi $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Comme $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}3\pi$, on obtient les 2 pts d'inflexion $x \simeq 0{,}3\pi$ et $x \simeq 0{,}7\pi$.

* f est C^∞ en tout pt x tel que $\sin^3 x$ ne change pas de signe en x, ie sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. f est continue sur $\mathbb{R}$. On montrera que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ si l'on réussit à prouver que $\lim\limits_{x\to k\pi} f'(x)$ existe pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

1) Si k est pair : $k=2p$ et :

$$\begin{cases} 2p\pi < x < 2p\pi+\pi & \Rightarrow f(x) = \sin^3 x \Rightarrow f'(x) = 3\sin^2 x\cos x \\ 2p\pi - \pi < x < 2p\pi & \Rightarrow f(x) = -\sin^3 x \Rightarrow f'(x) = -3\sin^2 x \cos x \end{cases}$$

Mais de toutes façons :

$$\lim_{x\to 2p\pi_+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 2p\pi_-} f'(x)$$

de sorte que la limite $\lim\limits_{x\to 2p\pi} f'(x)$ existe et soit nulle pour tout $p\in\mathbb{Z}$.

2) Le cas où k est impair se traite de manière identique.

Ccl : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

* f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. On montre, comme préc., que $\lim_{x\to k\pi} f''(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, de sorte que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

* Mais f n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$:

f sera de classe C^3 sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Voyons ce qui se passe en $x = 2p\pi$ $(p\in\mathbb{Z})$:

$$\begin{cases} 2p\pi < x < 2p\pi+\pi \Rightarrow f(x) = \sin^3 x \Rightarrow f^{(3)}(x) = 6\cos x - 9\sin^2 x\cos x - 18\sin^2 x\cos x \\ 2p\pi-\pi < x < 2p\pi \Rightarrow f(x) = -\sin^3 x \Rightarrow f^{(3)}(x) = -6\cos x + 9\sin^2 x\cos x + 18\sin^2 x\cos x \end{cases}$$

de sorte que $\lim_{x\to 2p\pi_+} f^{(3)}(x) = 6$ soit différente de $\lim_{x\to 2p\pi_-} f^{(3)}(x) = -6$.

CQFD

2.2 $\quad \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

2.3

a) $t \mapsto |\sin^3 t| \sin nt$ est impaire donc $b_n = 0$.

b) et c) :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^3 t \cos nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{3\sin t - \sin 3t}{4} \cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 3\sin t\cos nt - \sin 3t \cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{3}{2}\sin(n+1)t - \frac{3}{2}\sin(n-1)t - \frac{1}{2}\sin(n+3)t + \frac{1}{2}\sin(n-3)t \, dt$$

(*) $$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{-\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^\pi + \frac{3}{2}\left[\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+3)t}{n+3}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-3)t}{n-3}\right]_0^\pi\right)$$

dès que $n\neq 1$ et $n\neq 3$

* Si $n=2p+1$ avec $p\notin\{0,1\}$, on trouve $a_{2p+1}=0$.
Si $n=1$ ou 3, on remplace dans l'une des expressions précédentes "avant intégration" pour obtenir encore 0.
Ainsi $\boxed{a_{2p+1}=0 \quad \forall p\in\mathbb{N}}$

* Si $n=2p$, $(*)$ donne :

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n-3}\right)\right]$$

d'où :

$$a_n=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{8}{(n^2-9)(n^2-1)}$$

On retiendra donc : $\boxed{a_{2p}=\frac{24}{\pi(4p^2-9)(4p^2-1)}}$

3.1

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos pt\,dt\,.\cos px+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin pt\,dt\,.\sin px$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2}+\sum_{p=1}^{n}f(t)\underbrace{(\cos pt\cos px+\sin pt\sin px)}_{\cos p(t-x)}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}\cos p(t-x)\right)dt$$

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\quad,\text{ d'après 1.1}$$

(NB : En fait, on devrait écrire $S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\Phi(t)\,dt$ où $\Phi(t)=\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$
(comme au 1.1) si $t-x\neq 0\,[2\pi]$, et $\Phi(t)=n+\frac{1}{2}$ si $x-t=0\,[2\pi]$. Cette fct Φ, ainsi définie, est continue car :

si $\frac{t-x}{2} = u \to k\pi$

$$\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u} = \frac{\sin\left((2n+1)(v+k\pi)\right)}{2\sin(v+k\pi)} \quad \text{avec } v \to 0$$

$$= \frac{\sin((2n+1)v + k\pi)}{2\sin(v+k\pi)} = \frac{(-1)^k \sin(2n+1)v}{(-1)^k \cdot 2\sin v} \sim \frac{(2n+1)v}{2v} = \frac{2n+1}{2} = n+\frac{1}{2}$$

soit $\lim\limits_{u\to k\pi} \frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u} = n + \frac{1}{2} = \Phi(x + k2\pi)$.

L'intégrale du 2e membre de 3.1 est donc bien définie, car l'intégrand est une fct définie et continue sur $[-\pi,\pi]$ sauf une nbre fini de pts et se prolongeant, en chacun de ces points, en une fct continue sur tout $[-\pi,\pi]$: à savoir Φ.)

3.2 On a, $\Phi(t)$ désignant la fct du 1.1 :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt = \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t)\, dt$$

$$= \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos p(t-x) \quad dt$$

$$= f(x)$$

3.3 On en déduit l'égalité proposée en soustrayant les égalités 3.1 et 3.2

On a : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right] dt = \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} 2h(2u+x)\sin(2n+1)u \; du$

et il suffit d'appliquer 1.3 à cette dernière intégrale pour constater que sa limite est 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) - f(x) = 0$, ie $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x)}$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

4.1.a On trouve $\begin{cases} a_n(f) = -\frac{1}{n^2} a_n(f'') \\ b_n(f) = -\frac{1}{n^2} b_n(f'') \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4.1.b

$$|a_n(f'')| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos nt \, dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dt = 2M$$

où $M = \sup_{t \in [-\pi,\pi]} |f''(t)|$ existe puisque f'' est continue sur le compact $[-\pi,\pi]$.

Par suite $|a_n(f)| = \frac{|a_n(f'')|}{n^2} \leq \frac{2M}{n^2}$ d'où l'inégalité demandée

avec $K = 2M$. On recommencerait de la m̂ façon avec $|b_n(f)|$.

4.1.c

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement vers $f(x)$. En effet :

- $\sum u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ d'après 3.3
- $\forall n \quad |u_n(x)| \leq |a_n(f)| + |b_n(f)| \leq \frac{2K}{n^2}$ montre que $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément.

On pourra ainsi intervertir $\int_a^b$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$ comme en 1.4.c :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 0} u_n(x) . g(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) g(x) \, dx .$$

<u>NB</u> : En fait, on utilise la cv uniforme de $\sum u_n(x) g(x)$ vers $f(x).g(x)$ qui est évidente, car g continue assure l'existence d'un maximum M de $g(x)$ sur $[-\pi,\pi]$, d'où : $\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |u_n(x) g(x)| \leq \frac{2K}{n^2} . M$.

4.2 D'après 4.1.c :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g = \sum_{n\geq 0} \int_{-\pi}^{\pi} u_n \cdot g = \frac{a_0(f)}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx . g(x)\,dx + b_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, g(x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\, a_0(f) a_0(g)}{2} + \sum_{n\geq 0} a_n(f) . \pi\, a_n(g) + b_n(f) . \pi\, b_n(g)$$

Soit :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n\geq 0} a_n(f)\,a_n(g) + b_n(f)\,b_n(g)$$

(NB : C'est la relation de Parseval si $f = g$)

4.3. a

Par linéarisation :

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{2^6}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^6$$

$$= -\frac{1}{2^6}\left(e^{i6x} - 6e^{i5x}e^{-ix} + 15e^{i4x}e^{-i2x} - 20e^{i3x}e^{-i3x} + 15e^{i2x}e^{-i4x} - 6e^{ix}e^{-i5x} + e^{-i6x}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x\right)$$

d'où $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x\, dx = \frac{1}{32}\int_{-\pi}^{\pi} 10\, dx = \frac{20\pi}{32} = \frac{5}{8}\pi$

4.3. b

Ici $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{5}{8}$.

La formule 4.2 donne :

$$\frac{5}{8} = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n(f))^2 + (b_n(f))^2$$

et compte tenu du 2.3 :

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{24}{9\pi} = \dfrac{8}{3\pi} \\ a_{2n+1} = 0 = b_n \quad \forall n \\ a_{2n} = \dfrac{24}{\pi(4n^2-9)(4n^2-1)} \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{9\pi^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{576}{\pi^2 [(4n^2-9)(4n^2-1)]^2}$$

$$\boxed{\pi^2 = \frac{8}{5}\left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{576}{[(4n^2-9)(4n^2-1)]^2}\right]}$$